

# Mécanique du point

---

## CHAPITRE 6

# Mouvement dans un champ de forces centrales. Champ newtonien

Dr N'CHO Janvier Sylvestre

---

# Introduction (1)

---

Dans ce chapitre, le système physique étudié sera assimilé à un point matériel (ou particule)  $P$  de masse  $m$ . L'étude sera toujours conduite dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ . Notre particule sera soumise à une **force centrale et conservative**. **La force de gravité** (ou interaction gravitationnelle) entre deux masses et **la force électrostatique** (ou interaction électrostatique) entre deux charges sont deux exemples fondamentaux de forces centrales et conservatives. A elles seules, ces deux forces expliquent un nombre important de phénomènes physiques.

---

---

# Force centrale et conservative : caractéristiques

---

# Systeme de coordonnees spheriques, rappels

En coordonnees spheriques, un point est repere par les variables  $r, \theta, \phi$ , comme indique sur la figure ci-dessous.

$$r \in [0, \infty[, \theta \in [0, 2\pi[, \phi \in [0, \pi[$$

On travaille dans la base orthonormee directe  $(P, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$ . Il s'agit encore d'une **base locale**. Ainsi le vecteur position s'ecrit simplement :

$$\vec{OP} = r\vec{u}_r$$

Il n'y a pas de consensus sur les notations, on appelle parfois  $\theta$  l'angle  $\phi$  et inversement.

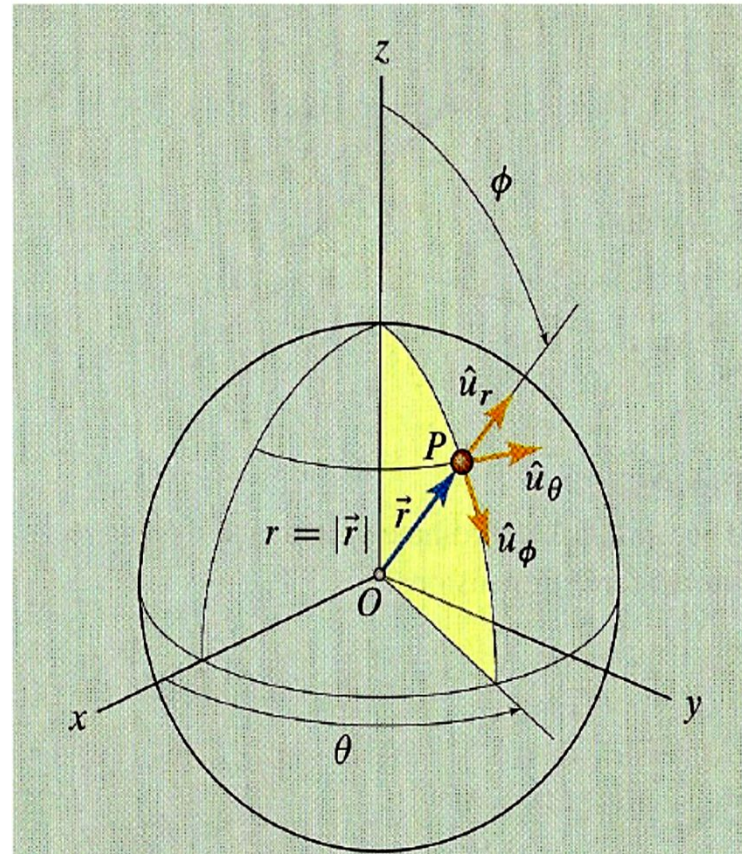


Figure 2.49

Definition of the unit vectors in spherical coordinates.

# Une force centrale est purement radiale

Le point  $P$  de coordonnées  $(r, \theta, \phi)$  est soumis à une force dite centrale si cette force s'écrit, par définition :

$$\vec{F} = F(r)\vec{u}_r \quad (\text{force centrale par définition})$$

Le module de  $\vec{F}$ , noté simplement  $F$ , ne dépend que de  $r$ , c'est-à-dire la distance du point  $P$  à l'origine du repère  $O$ .  $F$  ne dépend ni de  $\theta$  ni de  $\phi$ ,  $F$  est à **symétrie sphérique**. De plus  $\vec{F}$  est uniquement suivant  $\vec{u}_r$ , on dit que **la force est radiale**.

# Une force centrale conservative dérive d'une énergie potentielle (1)

On a déjà vu qu'une force conservative dérive d'une énergie potentielle. Il existe donc une fonction énergie potentielle  $E_p(\vec{r})$  associée à cette force. De plus comme cette dernière est centrale, elle ne dépend que de la variable  $r$ , alors  $E_p$  n'est fonction que de  $r$  et

$$F(r) = -\frac{dE_p(r)}{dr}$$

On retiendra alors :

$$\text{Force centrale} \Rightarrow \vec{F} = F(r)\vec{u}_r$$

$$\text{Force centrale conservative} \Rightarrow F(r) = -\frac{dE_p(r)}{dr}$$

## Une force centrale conservative dérive d'une énergie potentielle (2)

- La force centrale conservative est attractive si elle est dirigée vers O :

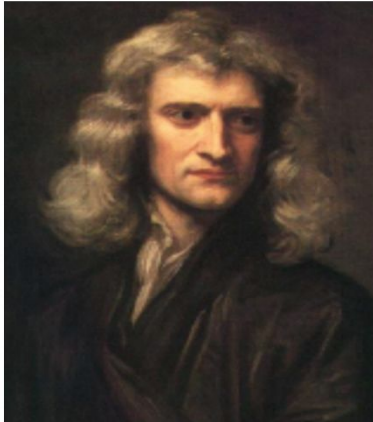
$$F(r) < 0 \quad \text{et} \quad \frac{dE_p(r)}{dr} > 0$$

- La force centrale conservative est répulsive dans le cas contraire :

$$F(r) > 0 \quad \text{et} \quad \frac{dE_p(r)}{dr} < 0$$

# Force de gravité vs Force électrostatique (1)

## FORCE DE GRAVITE



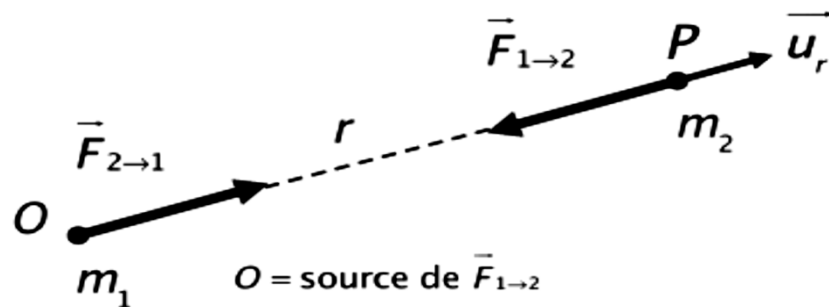
Sir Isaac Newton (1643–1727)

## FORCE ELECTROSTATIQUE

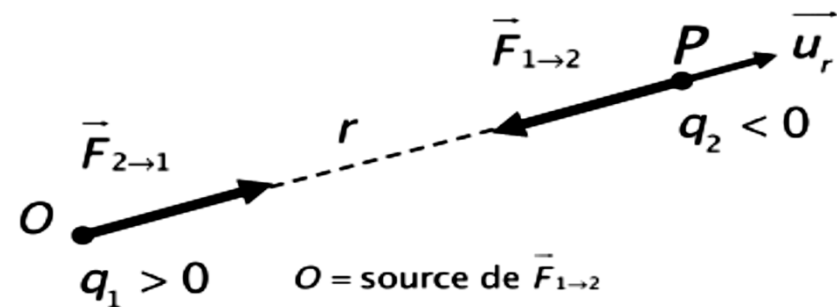


Charles de Coulomb (1736–1806)

$P$  = point d'application de  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$



$P$  = point d'application de  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$





# Force de gravité vs Force électrostatique (2)

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -K \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r$$

$\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  attractive toujours

$K = G =$  constante de gravitation universelle

$$G = 6,673 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$$

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r$$

$\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  attractive si  $q_1 q_2 < 0$

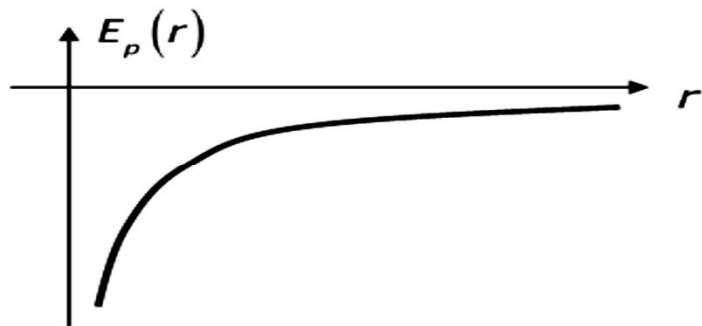
$\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  répulsive si  $q_1 q_2 > 0$

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

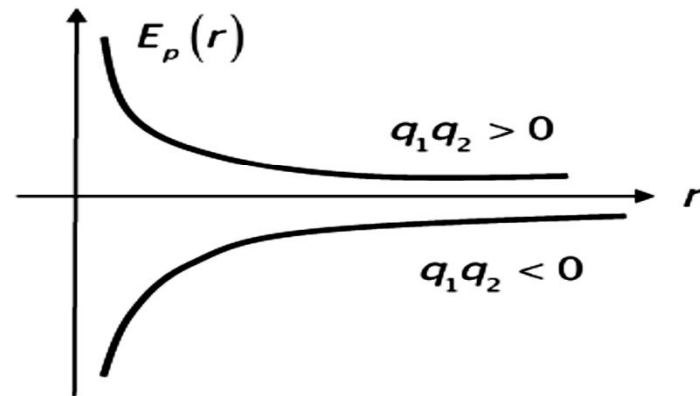
$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \times 10^9} \text{ C.N}^{-1}.\text{m}^{-2} \text{ (exactement)}$$

= permittivité du vide

$$E_p(r) = -K \frac{m_1 m_2}{r} \text{ (si } E_p(r = \infty) = 0)$$



$$E_p(r) = K \frac{q_1 q_2}{r} \text{ (si } E_p(r = \infty) = 0)$$



# Force de gravité vs Force électrostatique (3)

---

On constate une très forte analogie entre l'expression de la force de gravité et celle de la force électrostatique. La grande différence réside dans le fait que **la force électrostatique peut être répulsive ou attractive en fonction des signes des charges mises en jeu.**

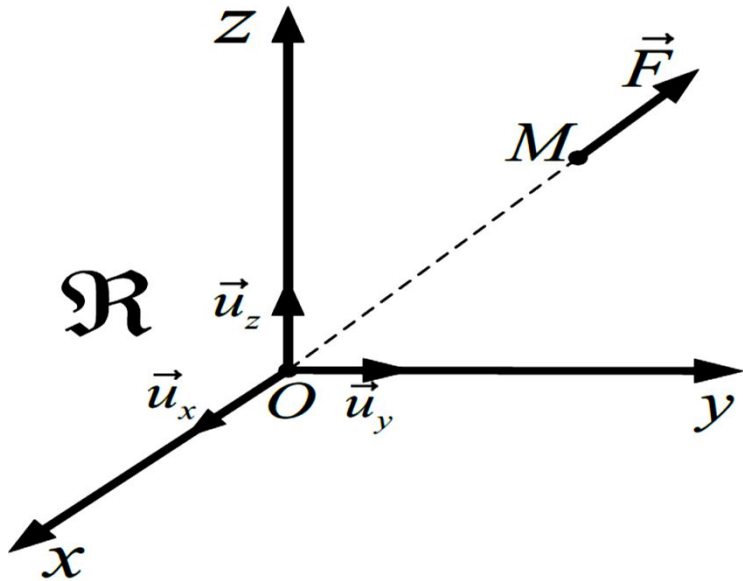
**La force de gravitation est toujours attractive** car les masses sont toujours des grandeurs positives.

---

# Lois générales de conservation

---

# Moment cinétique (1)



Considérons un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  et un champ de forces centrales  $\vec{F}(M)$  de centre  $O$  immobile dans  $\mathcal{R}$ . Comme  $\overrightarrow{OM}$  et  $\vec{F}(M)$  sont parallèles, on obtient la relation suivante :

$$\left( \frac{d\vec{\sigma}_{O/\mathcal{R}}(M)}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}(M) = r\vec{u}_r \wedge F\vec{u}_r = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_{O/\mathcal{R}}(M) = \overrightarrow{cte} = \vec{L}_0$$

# Moment cinétique (2)

Dans un référentiel galiléen, lorsqu'un point  $M$  est soumis à l'action d'une force centrale le moment cinétique du point  $M$  noté  $\vec{\sigma}_{O/\mathcal{R}}(M)$ , calculé au centre de forces  $O$  est un vecteur constant au cours du mouvement :

$$\vec{\sigma}_{O/\mathcal{R}}(M) = \overrightarrow{cte}$$

**Le moment cinétique d'une force centrale est conservatif.**

# Planéité de la trajectoire

À chaque instant, le moment cinétique est constant  
 $\Rightarrow \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = \overrightarrow{L_0} = cte$ .  $\overrightarrow{L_0}$  est déterminé par les conditions initiales  $\overrightarrow{OM}$  et  $\vec{v}$  à  $t = 0$ . Donc à chaque instant le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  est perpendiculaire au vecteur constant  $\overrightarrow{L_0}$ .  $O$  est fixe cela veut dire que le point  $M$  se déplace dans le plan perpendiculaire à  $\overrightarrow{L_0}$  et qui contient le plan.

**Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , la trajectoire d'un point  $M$  soumis à un champ de forces centrale est plane : elle se situe dans le plan perpendiculaire à  $\overrightarrow{L_0}$  et qui contient le centre de forces  $O$ .**

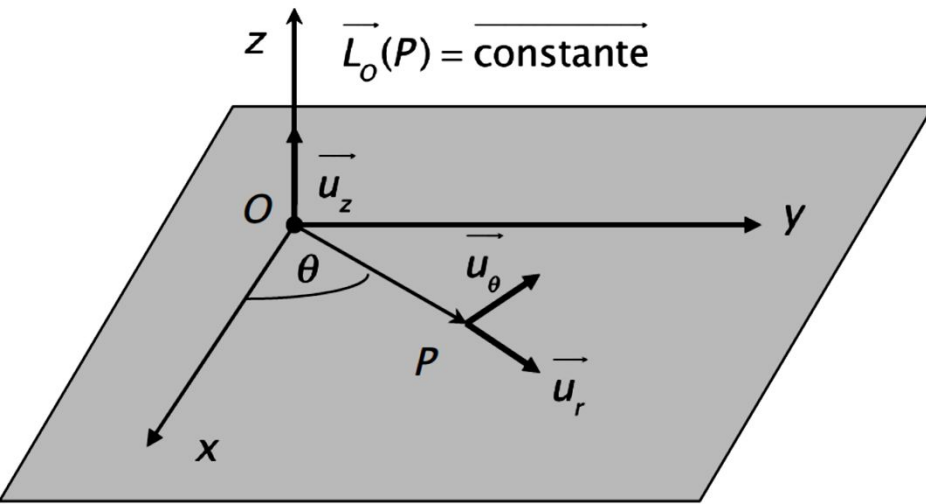
# A retenir

---

Un point matériel soumis à une force centrale a un mouvement plan et son moment cinétique est une constante du mouvement.

**Ce résultat important explique le fait que la trajectoire de la terre autour du soleil ou de la lune autour de la terre est plane. Il faut noter que ce résultat ne dépend que du fait que la force soit centrale, pas du fait qu'elle soit conservative.**

# Loi des aires en Coordonnées cylindriques (1)



Puisque le mouvement est effectué dans un plan deux coordonnées suffisent pour repérer la position du point  $P$  dans ce plan. Il est alors judicieux d'utiliser les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  et placer le centre de forces à l'origine du référentiel.

$$\vec{F}(P) = F(r)\vec{u}_r$$
$$\overrightarrow{OP} = r\vec{u}_r$$

$$\vec{v}(P) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

Le moment cinétique s'écrit :

$$\vec{\sigma}_{O/\mathcal{R}}(P) = \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = r\vec{u}_r \wedge m(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$



# Loi des aires en Coordonnées cylindriques (2)

$$\vec{\sigma}_{O/\mathcal{R}}(P) = \overline{cte} \Rightarrow \vec{\sigma}_{O/\mathcal{R}}(P) = mr^2 \dot{\theta} \vec{u}_z = \overline{L_0}(P) = L_0 \vec{u}_z \Rightarrow L_0$$

$$= mr^2 \dot{\theta} \Rightarrow \boxed{\mathcal{C} = \frac{L_0}{m} = r^2 \dot{\theta}}$$

**$\mathcal{C}$  est appelé constante des aires.**

## Remarques:

✓ Généralement  $\mathcal{C}$  est déterminé par les conditions initiales :

$$\mathcal{C} = (\overline{OM_0} \wedge \vec{v}_0) \cdot \vec{u}_z$$

✓ Si  $\vec{\sigma}_{O/\mathcal{R}}(P) = \vec{0} \Rightarrow \dot{\theta} = 0 \Rightarrow$  le mouvement se fait dans la direction de  $\vec{u}_r$  : c'est un mouvement rectiligne

# Loi des aires en Coordonnées cylindriques (3)

Pour un point matériel soumis à une force centrale, le moment cinétique est une constante du mouvement :

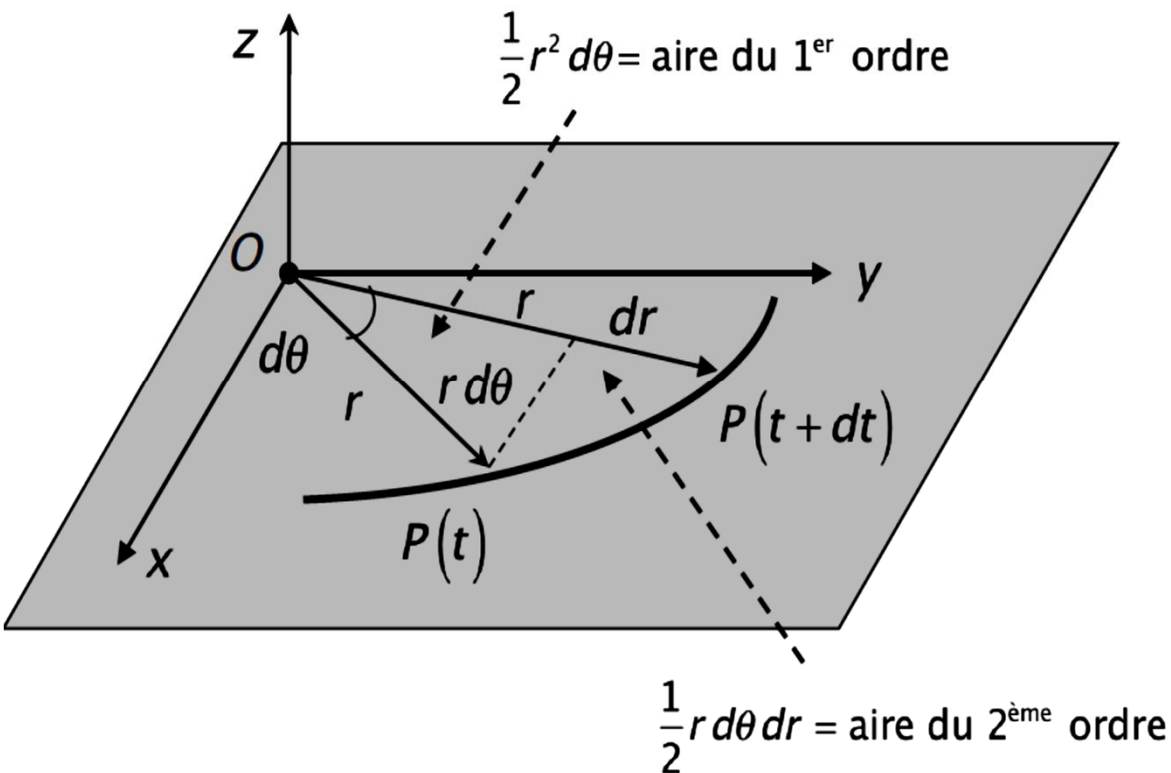
$$\vec{L}_O = mr^2 \dot{\theta} \vec{u}_z = \overline{cte}$$

Cela se traduit par le fait que la grandeur  $C \equiv r^2 \dot{\theta}$  est une constante du mouvement.

La relation  $r^2 \dot{\theta} = cte$  est nommée **intégrale première du mouvement**. Là encore, **ce résultat ne dépend que du fait que la force soit centrale, pas du fait qu'elle soit conservative.**

# Loi des aires en Coordonnées cylindriques (4)

La relation précédente trouve une interprétation géométrique remarquable dans la description de la trajectoire du point P .



Entre deux instants infiniment proches  $t$  et  $t + dt$ , le point P balaie l'aire élémentaire:

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta + \frac{1}{2} r d\theta dr$$
$$\approx \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

# Loi des aires en Coordonnées cylindriques (5)

le deuxième terme étant négligeable devant le premier car il s'agit d'un terme infiniment petit d'ordre 2. On obtient:

$$\boxed{\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} C} \Rightarrow \boxed{S = \frac{1}{2} C \Delta t}$$

$\frac{dS}{dt}$  est appelée **la vitesse aréolaire** et correspond à la vitesse à laquelle la surface est balayée par le rayon vecteur  $\overrightarrow{OP}$

On peut déterminer la vitesse aréolaire autrement:

$$dS = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OP} \wedge d\overrightarrow{OP}\| = \frac{1}{2} \|r\vec{u}_r \wedge (dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta)\| = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

# Loi des aires en Coordonnées cylindriques (6)

$S$  est l'aire balayée par  $P$  pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$ . Cela signifie que, pendant un intervalle de temps donné, l'aire balayée est toujours la même au cours de l'évolution du point  $P$ . Ce résultat justifie la deuxième loi de Kepler obtenue à partir d'observations expérimentales.

## Conclusion:

Dans un mouvement à force centrale, le rayon vecteur balaie des surfaces égales pendant des intervalles de temps égaux.  $P$  accélère lorsqu'il se rapproche du centre de force et ralentit lorsqu'il s'en éloigne.

# Loi des aires en Coordonnées cylindriques (7)

## Exercices d'application:

- 1) Montrer que si la trajectoire d'un point soumis à une force centrale est un cercle, le mouvement de ce point est alors uniforme.
- 2) Un satellite se trouve à une altitude de  $4 \cdot 10^2 \text{ Km}$ . La fusée porteuse lui imprime alors une vitesse  $\vec{v}_0$  de norme  $9 \text{ Km/s}$  faisant un angle de  $85^\circ$  avec la direction radiale. Calculer l'aire balayée par le rayon vecteur  $\overrightarrow{OM}$  chaque minute ( $R_T = 6,4 \cdot 10^3 \text{ Km}$ ).

# Energie mécanique

$$E_m = E_C + E_P(r) = \frac{1}{2}mv^2 + E_P(r) = \frac{1}{2}m \left[ \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 \right] + E_P(r)$$
$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + E_P(r) = cte$$

$$C = r^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{C}{r^2} \Rightarrow$$

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_P(r)$$

Pour un point matériel soumis à une force conservative, l'énergie mécanique est une constante du mouvement :  $E_m = \text{constante}$ .

L'équation  $E_m = \text{constante}$  est aussi appelée **intégrale première du mouvement**.

# Energie potentielle effective

L'énergie potentielle efficace ne dépend que de  $r$  et est définie par  $E_{Peff}(r)$ :

$$E_{Peff}(r) = \frac{1}{2} m \frac{c^2}{r^2} + E_P(r)$$

d'où

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{Peff}(r)$$

**C'est l'intégrale première de l'énergie**



# Domaines accessibles à la trajectoire (1)

Le domaine des valeurs de  $r$  accessibles à la trajectoire est restreint par le fait que  $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0 \Rightarrow E_m \geq E_{Peff}(r)$

Lorsque  $E_m = E_{Peff}(r)$  on a  $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = 0 \Rightarrow \dot{r} = 0 \Rightarrow r$  atteint une valeur minimale ou maximale. On retiendra que :

$$\text{Domaines accessibles à la trajectoire} \Rightarrow E_m \geq E_p^{eff}(r)$$

□ Pour une **trajectoire circulaire**  $r = R \Rightarrow E_C = 0 \Rightarrow E_m = E_{Peff}(r) = cte$

# Domaines accessibles à la trajectoire (2)

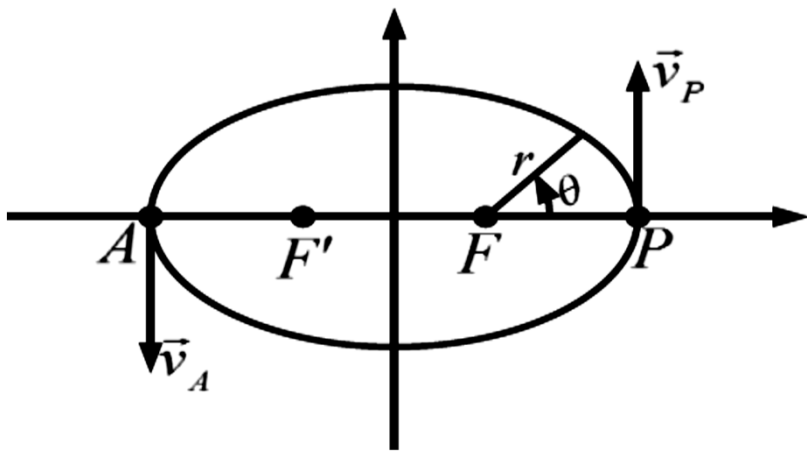
□ Pour une **trajectoire elliptique** avec origine au foyer, on a un point:

✓ **P est appelé périhélie** (le point le plus proche au foyer origine) :

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_{min} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_P = \mathbf{0}$$

✓ **A est appelé aphélie** (le point le plus éloigné du foyer origine)

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_{max} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_A = \mathbf{0}$$



$$\vec{v}(M) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \mathbf{v}_A = r_A \dot{\theta}_A \\ \mathbf{v}_P = r_P \dot{\theta}_P \end{cases}$$

$$C = r^2 \dot{\theta} = r(r\dot{\theta}) \Rightarrow$$

$$\mathbf{r}_A \mathbf{v}_A = \mathbf{r}_P \mathbf{v}_P$$

---

# Discussion du mouvement radial

---

# Exemple de la force électrostatique (1)

Il s'agit du cas d'une particule soumise à une force électrostatique répulsive

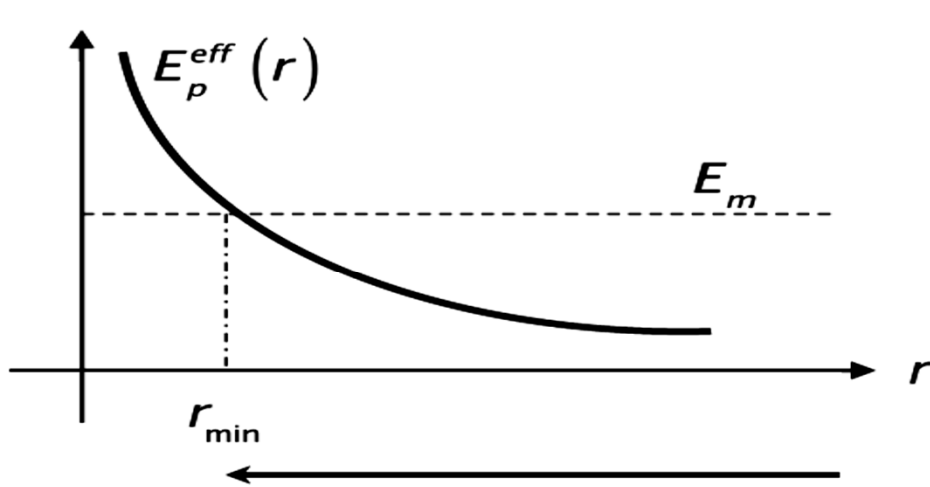
$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r$$

avec  $q_1 q_2 > 0$ . Cette situation correspond à la célèbre expérience de Rutherford dans laquelle une mince feuille d'or est bombardée par des noyaux d'hélium. Cette expérience a permis de mettre en évidence le noyau des atomes.

$$E_P(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} > 0 \quad \text{et} \quad E_{Peff}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} > 0$$

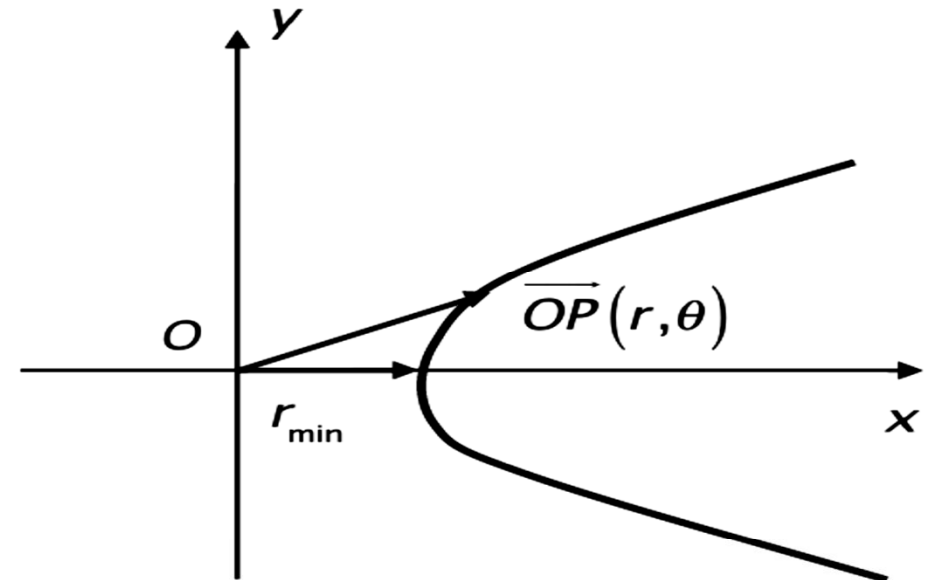
# Exemple de la force électrostatique (2)

Le domaine accessible à la trajectoire est fourni par la condition  $E_m \geq E_{Peff}(r)$  comme illustrée sur la figure ci-dessous.



Zone accessible, ETAT DE DIFFUSION

Mouvement radial



Trajectoire complète :  
Mouvement hyperbolique

# Exemple de la force électrostatique (3)

---

La trajectoire atteint  $r_{min}$  quand  $E_m = E_{Peff}(r)$ . Par contre, il n'y a pas de limite supérieure à la valeur de  $r$ , on a un état de diffusion. Une particule arrivant de l'infini se rapproche du pôle ; sa vitesse radiale diminue,  $E_{Peff}(r)$  augmentant à la distance  $r_{min}$ , **cette vitesse s'annule** et la particule s'éloigne à nouveau jusqu'à l'infini : c'est un état de diffusion.

On peut montrer que la trajectoire complète correspond à une hyperbole.

# Exemple de la force de gravitation (1)

Il s'agit du cas d'une particule soumise à la force de gravitation attractive

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r$$

Cette situation correspond au cas des planètes du système solaire soumises à l'attraction du soleil, de la lune et des satellites artificiels soumis à l'attraction de la terre, des interactions entre galaxies etc...

$$E_P(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r} \quad \text{et} \quad E_{Peff}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - G \frac{m_1 m_2}{r}$$

# Exemple de la force de gravitation (2)

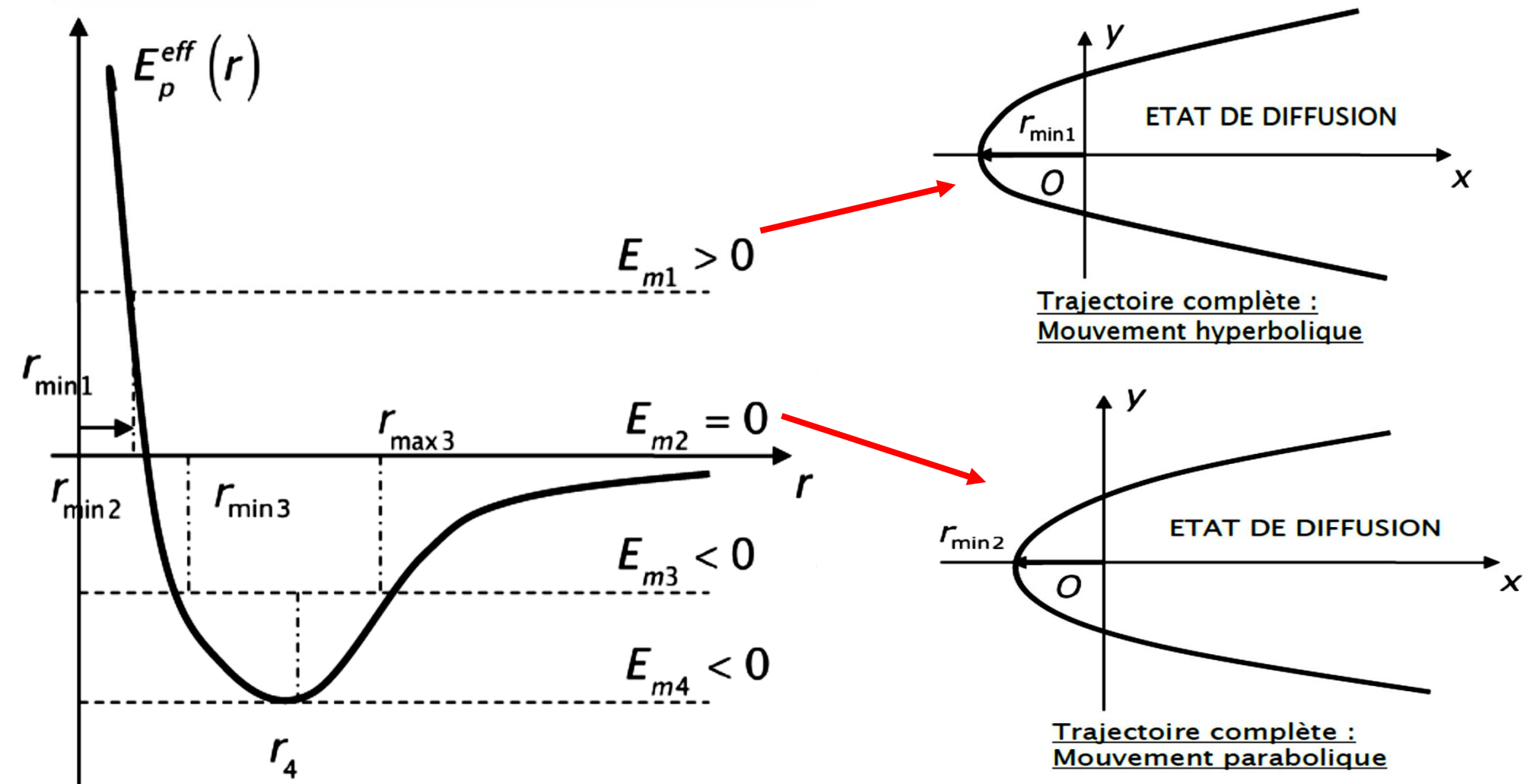
La situation est plus complexe mais aussi plus riche dans ce cas, car, suivant les valeurs de  $r$ , on a  $E_{Peff}(r) < 0$  où  $E_{Peff}(r) > 0$ . L'allure de  $E_{Peff}(r)$  est représentée ci-dessous ainsi que les divers domaines accessibles suivant la valeur de  $E_m = \text{constante}$ . Le domaine accessible à la trajectoire est toujours donné par la condition:

$$E_m \geq E_{Peff}(r)$$

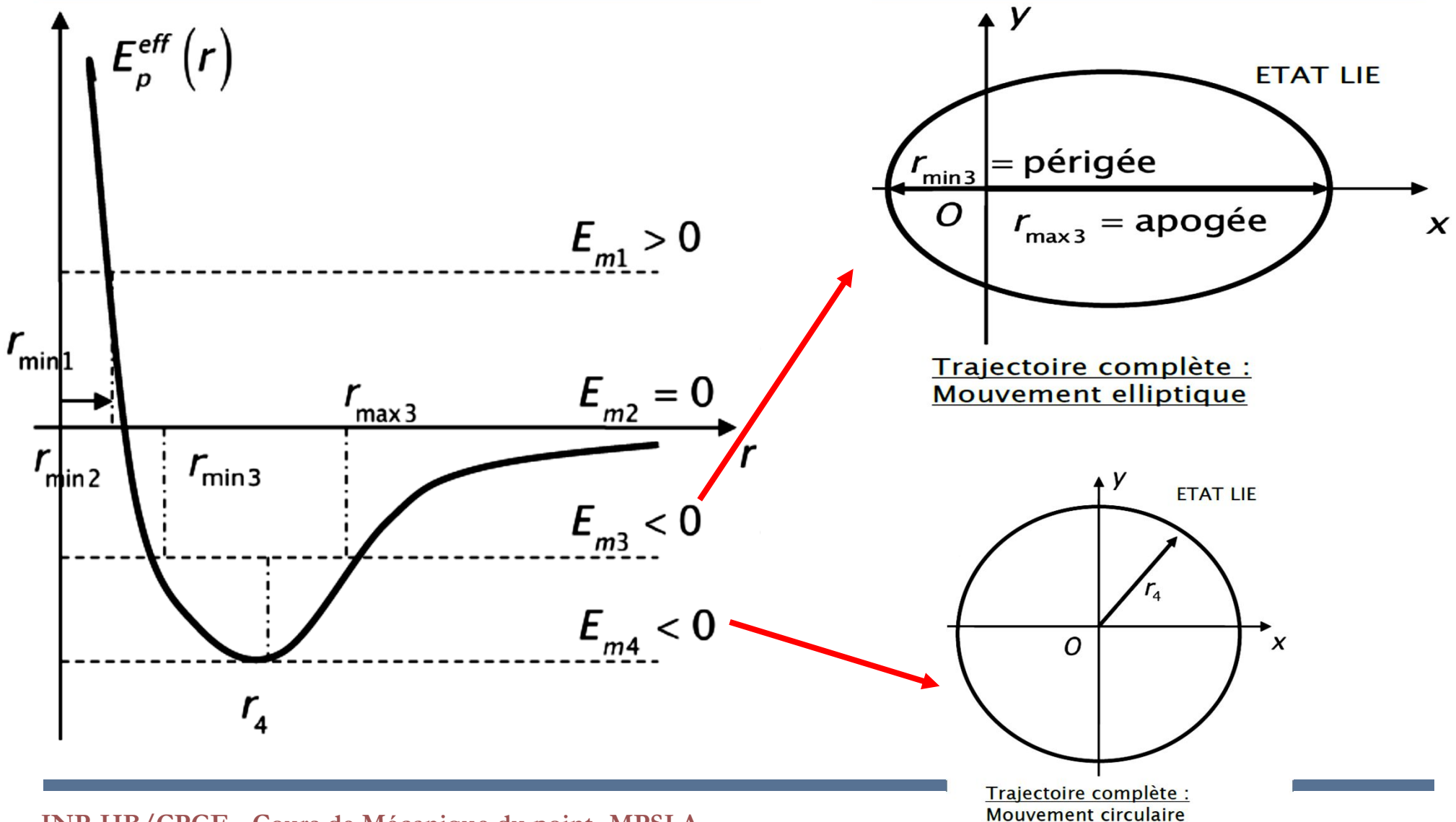
Le domaine accessible à la trajectoire est fourni par la condition  $E_m \geq E_{Peff}(r)$  comme illustrée sur la figure ci-après:



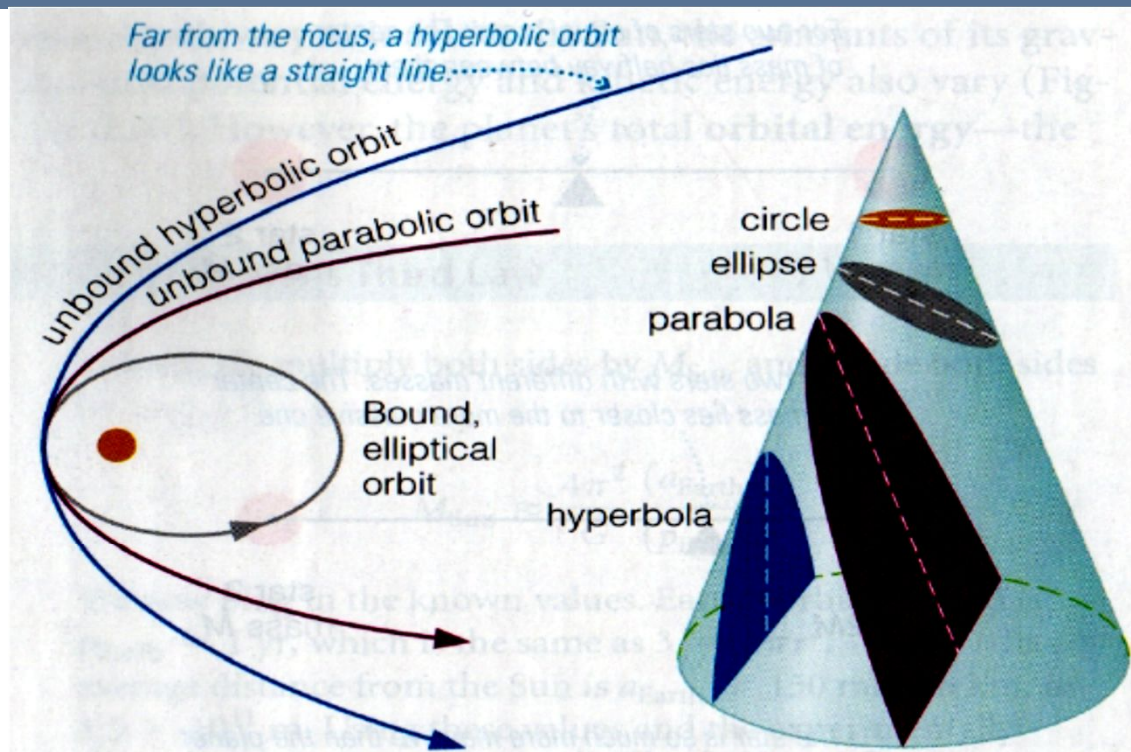
# Exemple de la force de gravitation (3)



# Exemple de la force de gravitation (4)



# Exemple de la force de gravitation (5)



**a** Orbits allowed by the law of gravity.

**b** Ellipses (which include circles), parabolas, and hyperbolas are conic sections, made by slicing a cone at different angles.

**Figure 4.17** Newton showed that ellipses are not the only possible orbital paths. Orbits can also be unbound, taking the mathematical shapes of either parabolas or hyperbolas.

---

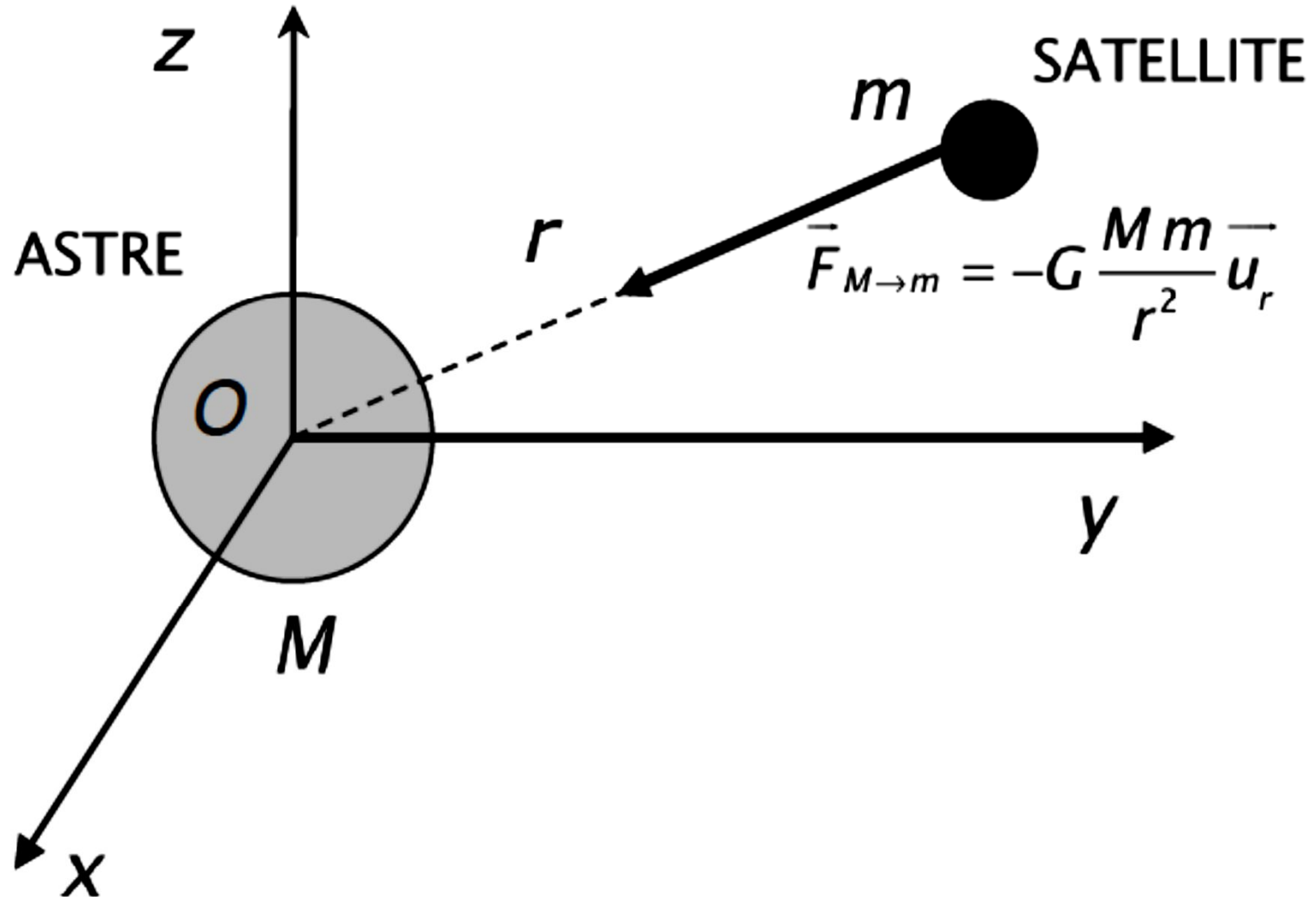
# Mouvement d'un point matériel soumis à la force de gravité

---

# Hypothèse de l'étude (1)

Nous allons étudier le mouvement d'un point matériel de masse  $m$  (le satellite) soumis à la force de gravité d'un autre objet (l'astre attracteur) de masse  $M$ . L'astre sera situé au centre du référentiel galiléen  $O$  et considéré comme immobile car on supposera que  $M \gg m$ . Cette situation est une bonne approximation quand on veut décrire le mouvement des planètes autour du soleil ou de satellites autour de la Terre. **En général, les états liés du satellite sont des ellipses mais quand  $M \gg m$ , les ellipses deviennent des cercles.** C'est pourquoi nous allons étudier uniquement les trajectoires circulaires. Dans ce cas également, la situation est une bonne approximation pour décrire le mouvement des planètes autour du soleil ou de satellites autour de la Terre.

# Hypothèse de l'étude (2)



# Les trois lois de Kepler (1)

---

**1<sup>ère</sup> loi** : Chaque planète du système solaire décrit une orbite elliptique dont le soleil est l'un des foyers.

**2<sup>ème</sup> loi** : La ligne soleil-planète balaie une aire égale pendant un intervalle de temps identique.

**3<sup>ème</sup> loi** : Le carré de la période de révolution d'une planète autour du soleil est proportionnel au cube du grand axe de l'ellipse qu'elle décrit.

# Les trois lois de Kepler (2)

---

La 1<sup>ère</sup> loi de Kepler trouve sa justification dans l'application du principe fondamental de la dynamique avec l'utilisation de la loi de gravitation de Newton.

La 2<sup>ème</sup> loi de Kepler est la conséquence de la conservation du moment cinétique comme nous l'avons vu.

Nous allons justifier la 3<sup>ème</sup> loi de Kepler dans le cas des orbites circulaires qui sont un cas particulier des orbites elliptiques (cas  $M \gg m$ ).

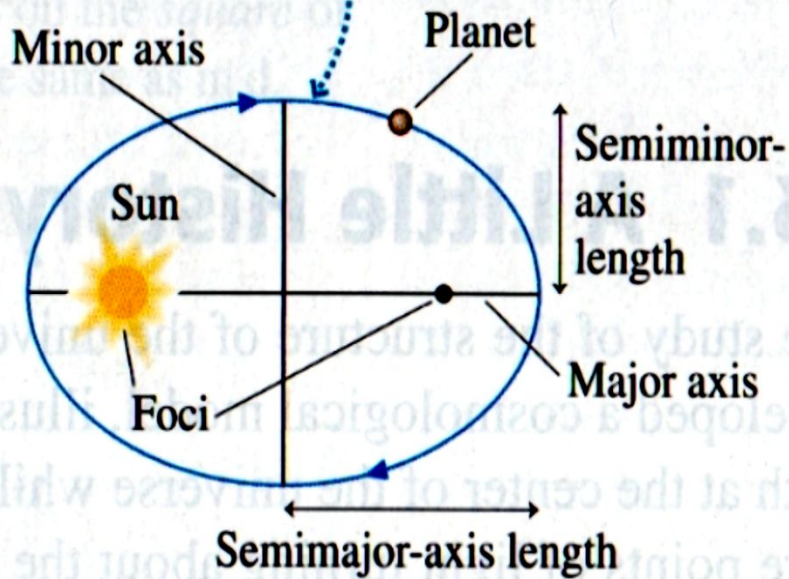


# Les trois lois de Kepler (3)

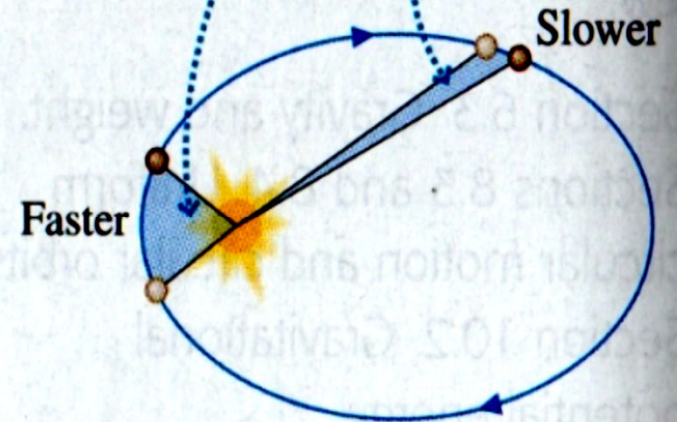
La figure ci-après illustre les lois de Kepler.

**FIGURE 13.2** The elliptical orbit of a planet about the sun.

(a) The planet moves in an elliptical orbit with the sun at one focus.

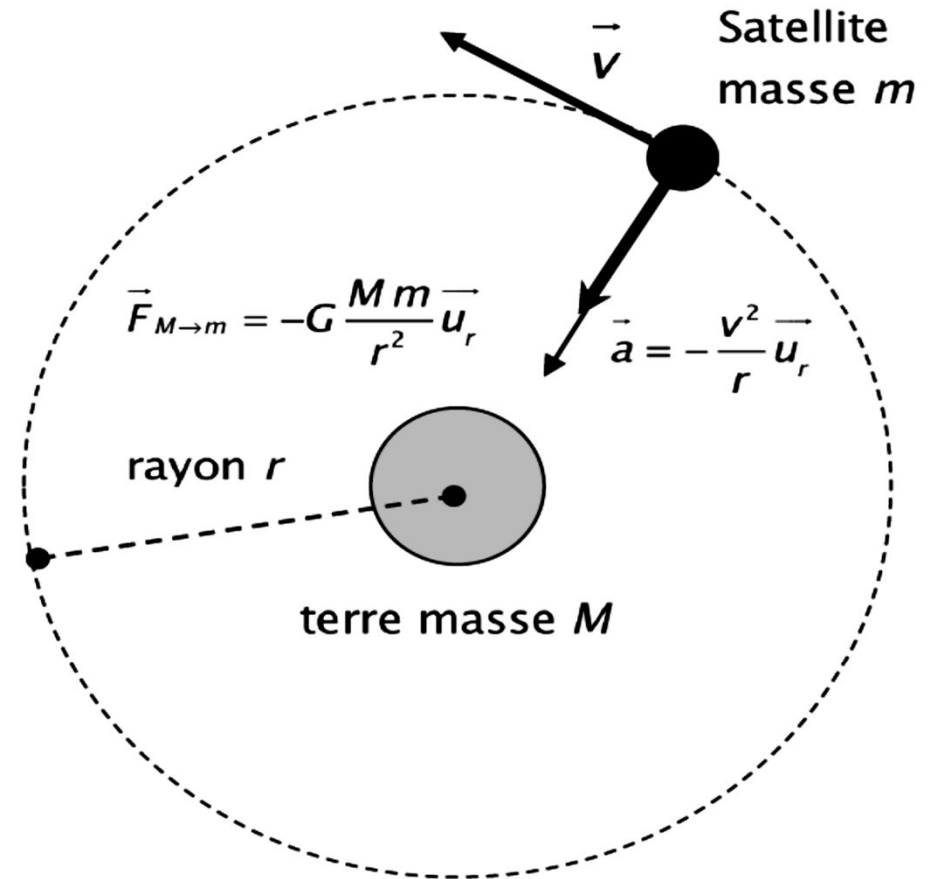
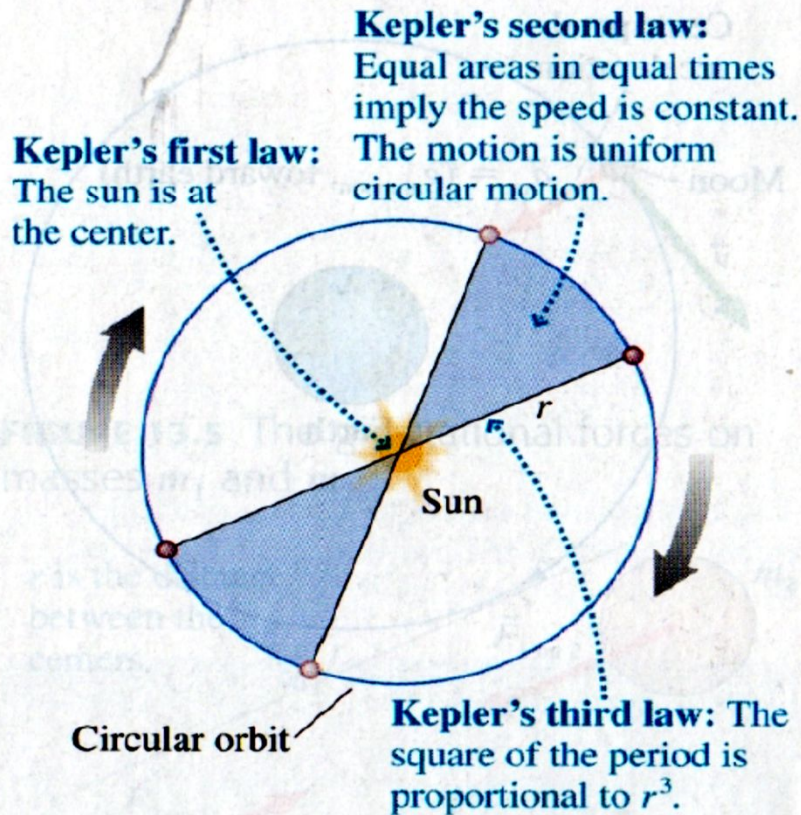


(b) The line between the sun and the planet sweeps out equal areas during equal intervals of time.



# Orbite circulaire (1)

**FIGURE 13.3** A circular orbit is a special case of an elliptical orbit.



# Orbite circulaire (2)

On se place toujours dans les hypothèses de l'étude. Nous allons étudier le mouvement d'un satellite autour de la Terre (satellite qui peut être la lune). Les résultats obtenus peuvent s'appliquer aussi au mouvement des planètes autour du soleil étant donné que les orbites elliptiques de ces planètes sont presque circulaires. Nous travaillerons en coordonnées polaires.

## □ Etat lié

L'énergie mécanique du satellite s'écrit

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - G \frac{Mm}{r}$$

# Orbite circulaire (3)

Pour le satellite le rayon  $r$  est fixé. le satellite est dans un état lié et  $E_m < 0$ . On retiendra ce résultat :

Orbite circulaire de rayon  $r$ :  $E_m < 0$  ETAT LIE

## Vitesse sur une orbite circulaire

$$PFD \Rightarrow \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{r} \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

# Orbite circulaire (4)

---

**On constate que la vitesse du satellite ne dépend que de la masse de l'astre attracteur et pas de sa propre masse.**

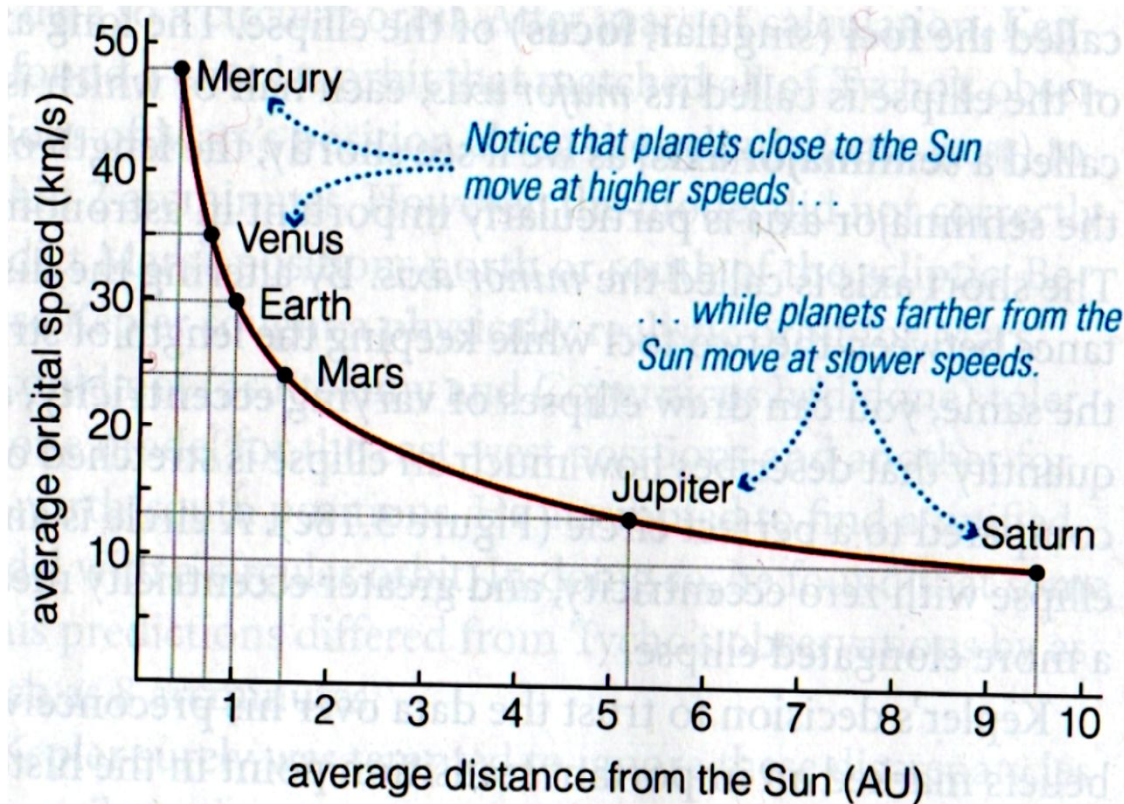
Cela provient du fait que la masse qui intervient dans le principe fondamental de la dynamique (masse dite inertielle) est la même que celle qui intervient dans l'expression de la force de gravité (masse dite grave).

**Ainsi, pour une même orbite circulaire de rayon  $r$ , tous les satellites ont la même vitesse.**

**On constate que lorsque  $r$  augmente, la vitesse du satellite diminue.**

# Orbite circulaire (5)

La figure suivante représente la vitesse des planètes du système solaire en fonction de leur distance moyenne par rapport au soleil (les orbites n'étant pas parfaitement circulaires mais elliptiques).



**b** This graph shows how orbital speed depends on distance from the Sun. (Kepler knew the form of this relationship but not actual speeds, because the numerical value of the astronomical unit was not yet known.)

# Orbite circulaire (6)

On peut établir les expressions des différentes grandeurs énergétiques

$$E_p = -\frac{GMm}{r} \quad E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r}$$

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}$$

$$\left. \begin{array}{l} E_m = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r} < 0 \quad (\text{orbite circulaire}) \\ E_m = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{a} < 0 \quad (\text{orbite elliptique}) \end{array} \right\} \text{pour } M \gg m$$

L'expression de l'énergie mécanique pour une orbite elliptique, se déduit de celle d'une orbite circulaire à condition de remplacer le rayon  $r$  de la trajectoire circulaire par le demi-grand axe  $a$  de l'orbite elliptique

# Orbite circulaire (7)

## □ Troisième de Kepler

La période de révolution du satellite vaut

$$T = \frac{\text{périmètre du cercle}}{\text{vitesse}} = \frac{2\pi r}{v}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{\frac{GM}{r}} = \frac{4\pi^2 r^3}{GM} \Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}}$$

Il s'agit de la troisième loi de Kepler. Ainsi quel que soit le rayon de l'orbite du satellite et quelle que soit sa masse, le rapport  $T^2/r^3$  est une constante qui dépend uniquement de la masse de l'astre attracteur.

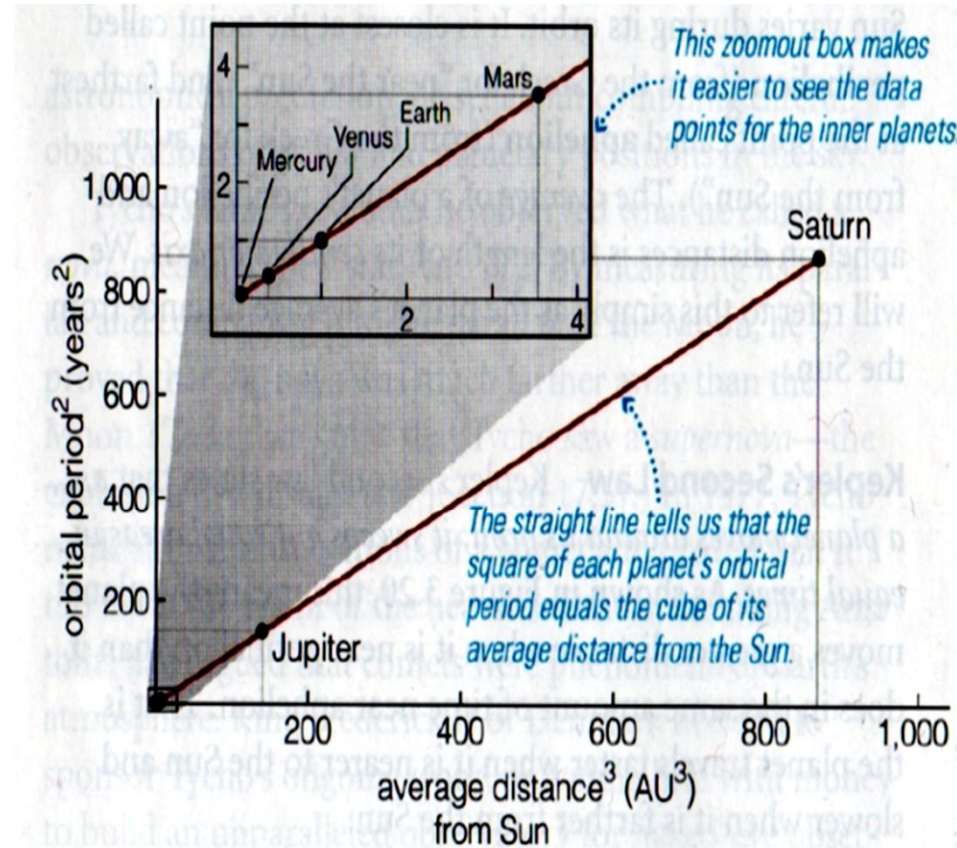


# Orbite circulaire (8)

Pour les planètes du système solaire, on a  $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$  où  $M_S$  est la masse du soleil et  $a$  le demi-grand axe de l'orbite elliptique. Ainsi pour chaque planète, le

rapport  $\frac{T^2}{a^3} = cte$  bien que  $T$  et

$a$  soient propres à chaque planète. La figure ci-contre traduit ce résultat.



**a** This graph shows that Kepler's third law ( $p^2 = a^3$ ) does indeed hold true; for simplicity, the graph shows only the planets known in Kepler's time.

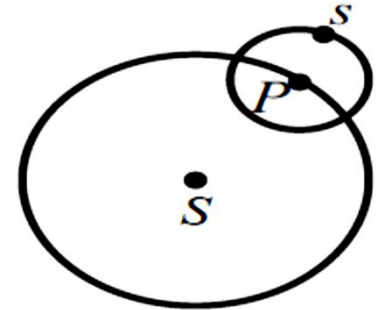
# Orbite circulaire (9)

## □ Détermination de la masse des astres

Notons  $S$  le soleil de masse  $M_S$ ,  $P$  une planète de masse  $m_P$ ,  $s$  un satellite de cette planète de masse  $m_s$

Nous supposons que  $M_S \gg m_P \gg m_s$ . L'action de  $P$  sur  $s$  est beaucoup plus importante que celle de  $S$  sur  $s$  car  $S$  est beaucoup plus éloigné de  $s$ . En conséquence  $s$  est soumis à l'action de  $P$ .

$$\Rightarrow \frac{T'^2}{a'^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_p} \quad (1)$$



$T'$  = période de révolution de  $s$  par rapport à un référentiel galiléen et lié à  $P$ .

# Orbite circulaire (10)

De même  $P$  est soumise aux actions de  $s$  et  $S$ . Celle de  $S$  est prépondérante car le soleil a une masse plus grande.

$$\Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} \quad (2)$$

$T$  = période de révolution de  $P$  par rapport à un référentiel de Kepler.

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{\frac{T^2}{a^3}}{\frac{T'^2}{a'^3}} = \frac{\frac{4\pi^2}{GM_S}}{\frac{4\pi^2}{Gm_p}} \Rightarrow m_p = M_S \left(\frac{a'}{a}\right)^3 \left(\frac{T}{T'}\right)^2$$

# Orbite circulaire (11)

## □ 1<sup>ère</sup> vitesse cosmique: vitesse de satellisation

On souhaite mettre sur orbite circulaire un satellite autour de la Terre avec un rayon égal à celui de la Terre  $R_T = 6370 \text{ km}$ . Il s'agit bien sûr d'un cas limite d'orbite basse. La station spatiale internationale se trouve à une hauteur de seulement 340 km environ. Le rayon de son orbite est donc proche de la valeur du rayon terrestre. **Quelle vitesse minimale doit-on communiquer au satellite pour le mettre en orbite ?**

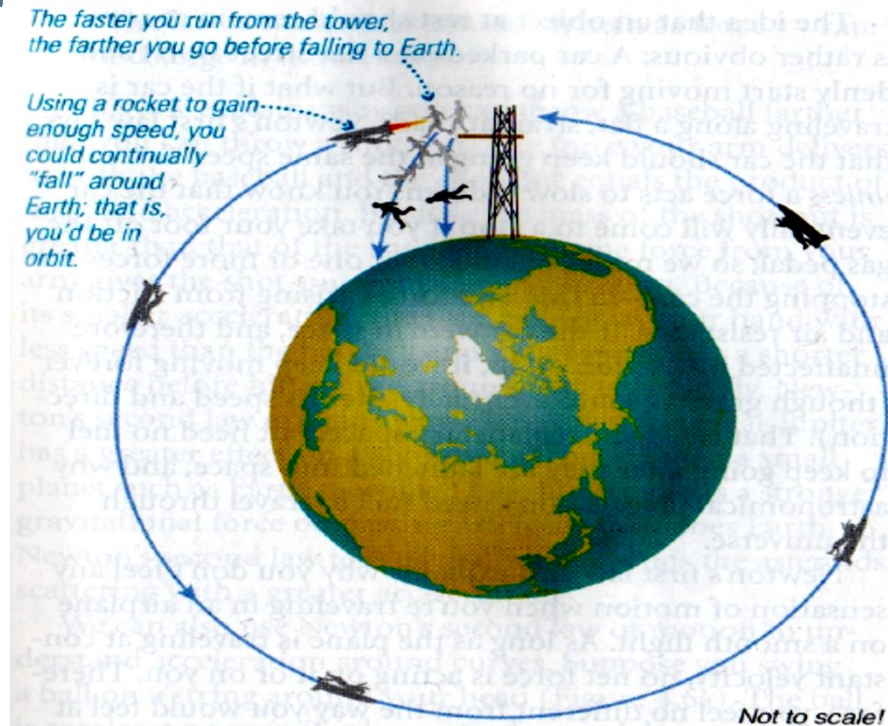
$$R_T \approx r \implies \boxed{v_S^2 = \frac{GM}{R_T}} \implies \boxed{v_S = 7,92 \text{ km/s}}$$

# Orbite circulaire (12)

C'est la vitesse limite qui correspond à la vitesse qu'il faut donner à un satellite pour le mettre en orbite autour de la terre. **Si la vitesse du satellite envoyé depuis la terre est inférieure à cette vitesse  $v_S$ , le satellite retombe sur terre.** Il s'agit bien sûr d'une vitesse énorme qui requiert beaucoup d'énergie. Pour diminuer cette énergie, on se sert de la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même qui à l'équateur est maximale et vaut  $\Omega_T = 0,46 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ . **C'est pour cela que les bases de lancement de fusée sont situées le plus près possible de l'équateur (Floride, Guyane, Kazakhstan).**

# Orbite circulaire (13)

Plus on lance un objet avec une grande vitesse, plus il va retomber loin. Lorsqu'on le lance avec la vitesse  $v_S$ , il va retomber tellement loin qu'il va continuellement tomber à côté de la Terre, il sera donc en orbite. On peut dire que la lune et les satellites artificiels tombent en permanence sur la Terre mais à côté (heureusement surtout pour la lune...). Cette situation est illustrée sur la figure ci-contre.



**Figure 4.4** Interactive Figure. This figure explains why astronauts are weightless and float freely in space. It shows that if you could leap from a tall tower with enough speed (perhaps with the aid of a rocket) you could travel forward so fast that you'd orbit Earth. You'd then be in a constant state of free-fall, which means you'd be weightless. Note: On the scale shown here, the tower extends far higher than the Space Station's orbit; the rocket orientation assumes that it rotates once with each orbit, as is the case for the Space Shuttle. (Adapted from *Space Station Science* by Marianne Dyson.)

# Orbite circulaire (14)

## □ 2<sup>ème</sup> vitesse cosmique: vitesse de libération

Quelle vitesse minimale faut-il donner à un objet sur Terre pour qu'il puisse s'échapper définitivement de l'attraction gravitationnelle de la Terre ? On notera  $v_{lib}$  cette vitesse. Avec  $v = v_{lib}$  l'objet pourra atteindre  $r \rightarrow +\infty$  avec une vitesse nulle, l'objet va s'arrêter à l'infini (si  $v > v_{lib}$  sa vitesse finale ne sera pas nulle). Dans l'état final, l'énergie mécanique de l'objet sera nulle  $E_{mf} = E_{cf} + E_{pf} = 0$ . Par conservation de l'énergie mécanique, on a  $E_{mf} = E_{mi} = 0$ . Or l'énergie mécanique initiale s'écrit

$$E_{mi} = E_{ci} + E_{pi} = \frac{1}{2}mv_{lib}^2 - \frac{GMm}{R_T} = 0$$

# Orbite circulaire (15)

---

$$v_{lib} = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}} \Rightarrow v_{lib} = v_S \sqrt{2} \Rightarrow v_{lib} = 11,17 \text{ km/s}$$

Si  $v > v_{lib}$  : le projectile peut quitter l'attraction terrestre.